קורס מבוא לאופטימיזציה

עבודה מסכמת

**על שיטות לפתרון בעיות אופטימיזציה מרובות מטרות מבוססות העדפות**

ספיר קרויטורו – אור ש. נעים

**הקדמה:**

במאמר זה, נעסוק בשיטות שונות לפתרון בעיות אופטימיזציה מרובות מטרות כאשר ללקוח יש העדפות מפורשות

(Multi-Objective Optimization MOO). תוך כדי שאנו ממחישים את השיטות על בעיית בניית תיק ההשקעות. בבעיה זו, אנו מתמקדים בשתי מטרות עיקריות; (I) מקסום תוחלת הרווח של התיק (II) מזעור הסיכון שבתיק. בראייה אינטואיטיבית, ניכר כי שתי מטרות אלו **מנוגדות**. מחד גיסא, ככל שמשקיעים יותר, תוחלת הרווח עולה. מאידך גיסא, ככל שמשקיעים פחות הסיכון קטן. ניתן אפוא לומר שבשביל למקסם תוחלת רווח של תיק יש להשקיע כמות כסף אינסופית ואילו בשביל למזער סיכון, מוטב ולא להשקיע כלל. בפרקים [להוסיף מספרי פרקים], נדון בשיטות שונות לשם מציאת איזון בין שתי מטרות אלו, ובמידה ונדרש [יש לציין שיטות שנדרש בהן], נוסיף מטרות נוספות בהתאם לצורך.

**מושגים:**

פונקציות המטרה מנורמלות

פונקצית המטרה הראשית

פונקציית מטרה לאחר שינוי

Utopia point

וקטור של פונקציות מטרה

אי שיוויון האילוצים

משוואת האילוצים

מספר פונקציות המטרה

*פרמטר של*

*-מספר ,המשתנים העצמיים .*

*זה המספר של אי שיווני האילוצים.*

מעריך החזקה ל global criterion

U פונקציית התועלת

וקטור המשקלים של האילוצים/החזקות

וקטור של משתני ההחלטה

Feasible design space

Aspiration point

Feasible criterion space

**הגדרת הבעיה:**

**בהניתן**  -וקטור של פונקציות מטרה נרצה לקיים:

*כאשר ,*

*פונקצית המטרה ה ,  
 מספר פונקציות המטרה*

*הינו וקטור של משתני החלטה  
 -מספר ,המשתנים העצמיים .*

*זה המספר של אי שיווני האילוצים.  
 זה וקטור של פונקציות מטרה מטרות הפונקציות*

*אין פיתרון כללי לבעית אופטימיזציה של מיקסום מטרות מרובות,נבחן כמה שיטות לפיתרון בעיה זו.  
חלק מהשיטות מכילות מוציאות פיתרון אשר הוא :*

*במילים אחרות ,הפיתרון המתקבל הקצה משאבים בצורה כזו,כך שאי אפשר להקצות אותם מחדש על מנת לשפר את מצבו של פרט או העדפה אחרת מבלי לשנות לרעה את מצבו של פרט אחר או העדפה אחרת.(מתוך ויקפידה)*

*שיטות אחרות לא תמיד מספקות פתרונות , אך מספקים תנאים אחרים המשמשים ליישום מעשי. לדוגמה השיטות מספקות פיתרון :*

*כלומר ,* זה *מצב אי אפשר לשפר את מצבו של כל אחד מפרטים.  
 (Mock, William B T. (2011). "Pareto Optimality". Encyclopedia of Global Justice..)*

*נקודה יכולה להיות* weakly Pareto optimal אם אין נקודה אחרת שמשפרת את כל פונקציות המטרה בו זמנית .לעומת זאת,נקודה יכול להיות Pareto optimal אם אין עוד נקודה שמשפרת לפחות מטרה אחת בלי לשנות לרעה בפונקציה אחרת.  
במילים אחרות Pareto optimal נקודות הן weakly Pareto optimal נקודות אך נקודות שהן weakly Pareto optimal אינן Pareto optimal.

*כדי לקבוע אם נקודה היא* Pareto optimal אנו משתמשים בבדיקה הבאה *:*

אם הוא 0 אז הוא point Pareto optimal .  
נשים לב כי יכול להיות שלבעיה יכול להיות מספר אינסופי של points Pareto optimal .לכן,כל שיטה צריכה להבחין בין שיטות שמספקות נקודהPareto optimal סופית או סט של נקודות פארטו אופטימליות.  
   
*ישנם שיטות אשר מספקות* compromise solution.פיתרון זה ממזער את השוני בין הנקודה אופטימלית לביןutopia point(נקרא גם ideal point):

באופן כללי F◦ היא unattainable .לכן נסתפק בפיתרון הקרוב ככל הניתן לutopia point .פיתרון כזה נקרא compromise solution והוא Pareto optimal. הקושי בפיתרון זה הוא ההגדרה של המילה "קרוב".בדרך ככל ההגדרה של קרוב זה למזער את המרחק האוקלידי.אך בחלק מהמקרים אין צורך להגביל את ההגדרה למקרה של Euclidean norm.אם יש פונקציות מטרה שונות עם יחידות מידה שונות,ה Euclidean norm בכל דרגה לא תמיד מספיקה קרוב בצורה מתמטית.לכן כל פונקצית מטרה צריכה להיות ללא מימדים.

**שיטת הקריטריון הכללי הממושקל:**

שיטה נפוצה זו להתמודדות עם בעיות אופטימיזציה מרובות מטרות, נקראת שיטת הקריטריון הכללי הממושקל (Weighted Global Criterion Method). בשיטה זו, כל פונקציות המטרה מתמזגות לכדי פונקציה אחת. פונקציה זו למעשה מייצגת את כל פונקציות המטרה בהתאם למשקל שנתנו להם. כך למשל, אם חשוב לנו יותר למקסם את רווח התיק, מאשר למזער את הסיכון, ניתן לפונקציה שמייצגת את מקסום רווח התיק משקל גדול יותר מהפונקציה שמייצגת את מזעור הסיכון בתיק. במידה ואין לנו העדפות ביחס לפונקציות המטרה השונות בהן עסקינן, והשתמשנו בשיטה זו, אפשר לומר שעבדנו עם **שיטת הקריטריון הכללי**, אך אילו, אנו רוצים לתת את הדעת על מידול העדפותינו כמו בדוגמא הנ״ל, נשתמש בשיטת **הקריטריון הכללי ה*ממושקל***. אחת מפונקציות התועלת הכלליות ביותר מבוטאות בצורתן הפשוטה ביותר כסכום אקספוננטציאלי ממושקל:

ההרחבות הנפוצות ביותר של פונקציות (1), (2) הן של Yu-Leitmann (1974), Zeleny (1982), Chankong-Haimes(1983).

כאן, הנו וקטור של משקלים, אשר לרוב מוגדר על ידי מבצע ההחלטות כך ש ומספר האיברים בווקטור המשקלים הוא כמובן, לפחות 1. אם מאתחלים את אחד או יותר מהמשקולות לאפס, עשויים לקבל יעילות פאראטו חלשה. באופן כללי, הערך היחסי של כל משקולת ביחס לשאר המשקולות, מבטא על חשיבותו היחסית ביחס למשקולות שמייצגות את שאר המטרות. ניתן להסתכל בסכימות שבמשוואות (3), (4) בשתי דרכים: האחת כשינוי של פונקציות המטרה המקוריות השנייה, כרכיבים של פונקציות מרחק שממזערות את המרחק בין הפתרון הנוכחי ונקודת האוטופיה ביחס למרחב של הקריטריון. השלכה של ההסתכלות השנייה היא ששיטות **קריטריון כללי** נקראות גם **שיטות מבוססות נקודת אוטופיה** או **שיטות** **תכנות התפשרותי**, היות ולרוב על מבצע ההחלטה לבצע **פשרה** מסוימת בין הפתרון הסופי לבין נקודת האוטופיה בפועל, לצורך קבלת יעילות חישובית, דהיינו, שימור על זמן ריצה סביר. כאשר מתפשרים על נקודת האוטופיה, כלומר מעריכים אותה על ידי z, מקבלים למעשה נקודה שנקראת **נקודת השאיפה** (Wietzbicki 1986, Miettinen 1999), או **נקודת מטרה** (Hallefjord- Jornsten 1986). [עצרתי בעמוד 6, תחילת חצי שני]

**שיטת הסכום הממושקל:**

זוהי הגישה הנפוצה ביותר לפתרון בעיות אופטימיזציה מרובות מטרות. היא מיוצגת על ידי פונקציית התועלת הבאה:

זוהי למעשה צורה של משוואות (1) או (2) כאשר . ובמילים אחרות, כופלים את התועלת שמתקבלת מכל פונקציית מטרה במשקולת שלה, ולכן, כאשר נצטרך להתפשר על האוטופיה, ננסה להתפשר יותר על המטרות שיש להן משקולת הקלה ולהתפשר פחות על המטרות בעלות המשקולת הכבדה. (Zadeh 1963) הראה כי מזעור משוואה 5, מספיק לקבלת אופטימליות פאראטית. קוסקי וסילבנוינן (1987) מציגים שיטה של משקול חלקית לפיה פונקציות המטרה המקוריות מקובצות לקבוצות עם מאפיינים משותפים. כל קבוצה משומשת ליצירת פונקציית סכום ממושקל **שאינה תלויה באחרות**, עם קבוצת משקלים ייחודית ובדרך זאת, מספר פונקציות המטרה המקוריות מצטמצם. סטוייר (1989) קישר מתמטית את המשקלים לפונקציית העדפות של מקבל ההחלטות. Eschenauer ושותפיו (1990) נתנו תיאור של השיטה במרחב האילוצים. קוסקי וסילבנוינן (1987) ממחישים את שיטת הסכום הממושקל כמקרה מיוחד של שיטות שמערבות p-norm. פרשנות שגוייה של המשמעות התאורטית והמעשית של משקולות עשויה לגרום לתהליך הבחירה האינטואיטיבית של משקולות באופן לא שרירותי למטלה לא יעילה. לפיכך, מדענים רבים, פיתחו גישות מגוונות לבחירת המשקולות. נסביר כאן בקצרה על הגישות הבסיסיות הכלליות. **שיטות מבוססות דירוג:** (Yoon and Hwang 1995) לפי גישה זו, פונקציות המטרה מסודרות ומדורגות על פי חשיבותן בעייני מקבל ההחלטות. הפונקציה הכי פחות חשובה, מקבלת משקולת בשווי 1. והפונקציות הבאות, מקבלות משקולות בערך עולה. (הפונקציה השנייה הכי פחות חשובה, מקבלת 2, השלישית הכי פחות חשובה מקבלת משקולת 3, הפונקציה הכי חשובה תקבל משקולת ששווה למספר פונקציות המטרה). משתמשים בגישה דומה **בשיטות מבוססות קטגוריה** בהן מטרות שונות מקובצות לקטגוריות רחבות כדוגמת ״מטרות מאוד חשובות״ או ״מטרות פחות חשובות״ וביוצא בזה. באופן כללי, בשיטות מבוססות דירוג, הרעיון הוא שמקבלי ההחלטות, נותנים משקולות שונות לפונקציות המטרה **בהתאם** לחשיבותן. כך למשל, אם עסקינן בבעיית בניית תיק ההשקעות, ואנו מתעדפים תוחלת רווח על פני מזעור סיכון, ניתן לפונקציית המטרה שמתארת את תוחלת הרווח משקולת בשווי 2, ולפונקציה שמתארת את מזעור הסיכון, משקולת בשווי 1. תהיות בנוגע ליחסים או השוואה בין זוגות, מספקות משמעות **לדירוג פונקציות הערכה בין זוגות** של פונקציות במקום דירוג פונקציה במקום השוואת פונקציה אחת לעומת כל שאר הפונקציות. Saaty (1977) מספק שיטה מבוססת ערכים עצמיים לשם החלטה לגבי המשקולות. שיטתו מערבת השוואות בין זוגות של פונקציות מטרה. סדרת השוואות זו מייצרת מטריצת השוואות, והערכים העצמיים של המטריצה, הם המשקולות.

**קשיים בשיטת הסכום הממושקל:**

מדענים רבים עסקו לאורך השנים בקשיים עם השיטה שזה עתה דנו בה. נתייחס בקצרה לשלושה קשיים. ראשית, למרות שקיימות שיטות רבות להחלטה על הגדרת המשקולות של פונקציות המטרה, **קיבוע מראש** של משקולות, לא בהכרח מבטיח שהפתרון הסופי יהיה טוב או אפילו מתקבל על הדעת. ייתכן ונדרש לכייל מחדש את המשקולות אחרי שביצענו את החישוב והגענו כבר לפתרון. Messac (1996) אף טוען שהמשקולות עצמם **לא יכולות** להיות קבועות, אלא עלינו להחליט שבחירת המשקולות היא פונקציית מטרה עצמאית **בפני עצמה**, בשביל לחקות את פונקציית הערכה באופן טוב. שנית, בשיטה זו, **לא ניתן לקבל נקודות על חלקים לא קמורים** של הקבוצה הפאראטית אופטימלית במרחב האילוצים (דס ודניס 1997, Messac ושותפיו 2000). שלישית, שימוש במשקולות שונות לא מבטיח לנו שימור של פיזור שווה של נקודות פאראטיות אופטימליות וייצוג מדוייק ונאמן של הקבוצה הפאראטית אופטימלית (דס ודניס 1997).

**השיטה הלקסיקוגרפית:**

בשיטה זו, פונקציות המטרה מסודרות לפי סדר חשיבותן. ואז בעיות האופטימיזציה הבאות נפתרות באופן סדרתית, אחת-אחת:

כאן, i מייצג את מיקום הפונקציה בסדר העדיפויות, ו מייצג את נקודת המקסימום של פונקציית המטרה הj, שנמצאת באיטרציה הj. לאחר האיטרציה הראשונה, , , לא בהכרח זהה למינימום העצמאי של , שכן אילוצים חדשים נוספו. האילוצים של נוסחא (6), ניתנים להמרה בשוויונות (סטדלר 1988). מספר חוקרים, מפרידים בין הגישה ההיררכית לגישה הלקסיקוגרפית, היות והיא כפופה לאילוצים הבאים (Osyczka 1984):

בהשוואה ל(6), (7), מייצג הקלה על האילוצים באמצעות העלאה של צידו הימני של האילוץ באחוז של . נע בטווח של . ניתן להדק את האילוצים וכך להשיג נקודות פאראטו אופטימליות שונות. Rentmeesters ושותפיו (1996) הציגו פתרונות עם השיטה הלקסיקוגרפית שלא עומדות בתנאי האופטימליות שהציגו Kuhn-Tucker בשנת 1950. במקום, חוקרים אלו מציגים תנאי אופטימליות חליפיים אותם הם פותרים באמצעות שיטות של ניוטון.

**קריטריון המשקל המעריכי:**

נועד להתמודד עם חוסר היכולת של שיטת **הסכום הממושקל** ללכוד נקודות על חלקים הלא קמורים של המישור הפאראטו אופטימלי. בשנת 1996, Athan and Papalambros הציעו שיטה זו כדלקמן:

כאשר הסיגמא מייצגת פונקציית תועלת עצמאית בעבור . למרות שערכים גדולים עשויים להוביל לOverflow, מזעור (8), מספק תנאי הכרחי ומספיק לאופטימליות פאראטית.

**שיטת המכפלה הממושקלת:**

בשביל לאפשר קיום של פונקציות עם סדרי גודל שונים, להיות עם חשיבויות דומות, ובשביל להימנע מהצורך לשנות צורה של פונקציות מטרה, כדאי לקחת בחשבון את הנוסחא הבאה:

כאשר הוא המשקולת של פונקציית המטרה הi, המייצגת את מידת חשיבותה. Bridgman (1922), היה הראשון להתייחס לשיטה זו וקרא לה, ״מכפלת החזקות״ (Product of Powers). Gerasimov and Repko (1978) הצליחו להשתמש בשיטה זו, והתייחסו אליה כאל ״פשרה תקפה״ לאופטימיזציית מרובת מטרות של מסבך[[1]](#footnote-1).

**תכנות פיזי:**

פותח לראשונה על ידי Messac ב1996, ומיושם מאז במגוון בעיות. תכנות פיזי, ממפה סיווג כללי של מטרות, ומביע מילולית העדפות לפונקציית תועלת. הוא מספק דרכים לשלב העדפות ללא צורך לעדכן את המשקולות הקשורות להעדפות אלו. במאמרו של Messac מ1996, מסופק הסבר מלא לשיטה ובמאמרם של Chen ושותפיו משנת 2000, יש הדגמות והמחשות נוספות. פונקציות מטרה, אילוצים, ומטרות כולם מטופלים באופן זהה ושווה כמטריצות עיצוב. באופן כללי, מקבל ההחלטות מעצב פונקציית תועלת יחידה שנקראת **פונקציית מחלקה**: , לכל מטריצת עיצוב. נקודתית, כל סוג של מטריצת עיצוב מזוהה תחילה עם סוג בודד של פונקציית תועלת המיוחדת על ידי צורה כללית כגון פונקצייה מונוטונית עולה, פונקצייה מונוטונית יורדת וכו. לאחר מכן, מקבל ההחלטות מסווג תחומים מספריים לכל מטריצה בהתאם להעדפותיו; רצוי, מוסכם, לא מתקבל על הדעת וכיוצא בזה. אם עסקינן למשל בבעיית בניית תיק ההשקעות נרצה לסווג תוחלת רווח גבוהה כתחום רצוי, תוחלת רווח קטנה כתחום מוסכם ותוחלת רווח שצפויה להניב לנו הפסד כתחום שאינו מתקבל על הדעת. תחומים אלו, כוללים כאמור גבולות מספריים על ערכי המטריצות שנחשבים ונלקחים בחשבון כאילוצים נוספים. תוך כדיי התקדמות התהליך, הגבולות שבין התחומים הנ״ל עשויים להתעדכן בהתאם להתקדמות. Messac (1996), דן בפרטים המתמטיים מאחורי העיצוב של **פונקציות המחלקה**. בשל האופן שבו פונקציות המחלקה נבנות, **תכנות פיזי** מסוגל לבצע אופטימיזציה לפונקציות המטרה עם הפרשי הגדלה ניכרים באופן יעיל. ניתן להסתכל על הדרישה לסווג מספרית ערכים לכל מטריצה בשני אופנים: מחד גיסא, דרישה זו מרמזת **שתכנות פיזי** מצריך הכרות מעמיקה עם כל מטרה ואילוץ. מאידך גיסא, ובאור חיובי יותר, דרישה זו מצהירה על יתרונות השיטה ועל כך שהיא מאפשרת ניצול יעיל של מידע זמין. פונקציות התועלת העצמאיות כטרנספורמציות נטולות ממד, חד מודליות, ממוזגות לפונקציית תועלת אחת כדלקמן:

כאשר dm מייצג את מספר מטריצות העיצוב שנלקחות בחשבון. Messac ושותפיו (2001), הוכיחו **שתכנות פיזי** מספק תנאי מספיק לאופטימליות פאראטית. שנה לאחר מכן, Messac and Mattson, מדגימים כיצד **תכנות פיזי** ניתן לשימוש כתנאי הכרחי לאופטימליות פאראטית. על ידי סיפוק כל הנקודות הפראטיות אופטימליות. שיטה זו למעשה טובה יותר **משיטת הסכום הממושקל** ביכולתה לייצג קבוצות אופטימליות פאראטית בפיזור אחיד של נקודות (Chen ושתפיו (2000), Messac (2000), Messac ושותפיו (2001)).

**דיון:**

מאמרם של R.T Marler, J.S Arora, (2004), שעליו עבודתנו מבוססת, סוקר שיטות רבות ומגוונות להתמודדות עם בעיות אופטימיזציה מרובות מטרות. ובפרט, לשיטות הקיימות כאשר למקבל ההחלטות יש העדפות ברורות באשר למטרות השונות (פרק 3 במאמר). בעבודה זו התייחסנו לחלק מהשיטות שהחוקרים דנו בהם; שיטת הקריטריון הממושקל, שיטת הסכום הממושקל, השיטה הלקסיקוגרפית, קריטריון המשקל המעריכי, שיטת המכפלה הממושקלת וסיימנו עם תכנות פיזי. בהנתן שיטות רבות כל כך להתמודדות על הבעיה, עולה בוודאי השאלה איזו שיטה היא הטובה ביותר? למרבה הצער, אין לשאלה זו תשובה אחת נכונה. נאמר אבל ששיטות המספקות תנאי הכרחי ומספיק לאופטימליות פאראטית, מהוות שיטות מעודפות. כאשר נתונה בעיה ומתבקש פתרון יחיד, היתרונות בקבלת פתרון שהוא אופטימלי פאראטי ברורים. בנוסף, שיטוח שמהוות תנאי הכרחי לאופטימליות פאראטית גם הם טומנים בחובם יתרונות. שיטות כאלו, ישרתו ביותר נאמנות את העדפותיו של מחולל ההחלטות מאשר שיטות שמפספסות נקודות מסוימות במישור הפאראטי (דהיינו, שיטות שאינן מספקות תנאי הכרחי לאופטימליות פאראטית). זאת מכיוון שבהנחה וכל הנקודות הפאראטיות דומות מתמטית, ונבדלות זו מזו רק בהעדפות הלקוח, אין סיבה מהותית להתעלם מפתרונות פוטנציאליים. התעלמות שכזאת עשויה לגזול ממקבל ההחלטות פתרון שמשרת באופן הנאמן ביותר את העדפותיו. לפיכך, עולה שאלה נוספת; דנו הרי במספר שיטות (ויש עוד הרבה שיטות שכלל לא דנו בהן), שמהוות תנאי הכרחי ומספיק לאופטימליות פאראטית. מבין שיטות אלו, באיזו שיטה כדאי להשתמש? התשובה לשאלה זו תלויה חלקית בשאלה לגבי היכולת של מקבל ההחלטות לאמוד נכונה את פונקציית העדפות שלו. **תכנות פיזי** הוא יעיל במקרה זה. משקולת כאמור מייצגת את הצורה הפשוטה ביותר של פונקציית תועלת ואילו **תכנות פיזי** מאפשר למחולל ההחלטות לעצב פונקציות תועלת שהן יותר מסובכות ומדויקות לכל מטרה בפני עצמה. בנוסף, למרות **שתכנות פיזי** מבוסס על העדפות שנכפות, הוא מספק דרך לחמוק משימוש במשקולות, שעשוי להיות קשה ומסובך. החסרונות המרכזיים של השיטה כאמור טמונים באתגר שבכתיבת התוכנית שעשוי להיות מאתגר, ובדרישה לידע רב אודות הבעיה הנתונה. באותו האופן, במקרים אחרים בהם לא ניתן לכתוב קוד של תכנית מבוססת שיטת תכנות פיזי או שאין מספיק ידע אודות הבעיה, שיטות אחרות שמהוות תנאי הכרחי ומספיק ליעילות פאראטית ניתנות לשימוש עם יתרונותיהן שלהן.

**מקורות:**

[**https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-003-0368-6**](https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-003-0368-6)

[**https://www.investopedia.com/ask/answers/041415/what-are-some-common-measures-risk-used-risk-management.asp**](https://www.investopedia.com/ask/answers/041415/what-are-some-common-measures-risk-used-risk-management.asp)

1. 1 [מסבך](https://he.wikipedia.org/wiki/%D7%9E%D7%A1%D7%91%D7%9A) הוא מבנה של מוטות שמחוברים ע״י חוליות ומרכיבים מבנה יציב. דוגמא למסבך הוא מגדל אייפל בפריז, צרפת. [↑](#footnote-ref-1)